# 演習解答1

(1) 基本公式

(1) ($P(\phi)=0$)

$A_1=A_2=\cdots=\phi$ とする. $A_i\cap A_j=\phi$ ($\forall i,j$) である.

$$P(\phi)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\phi) \quad (\because \sigma\text{-加法性})$$

である. $0\leq P(\phi)\leq 1$ より, $P(\phi)=0$ でなくてはいけない.

(2) ($P(A^c)=1-P(A)$)

$A_1=A$, $A_2=A^c$, $A_3=A_4=\cdots=\phi$ とする. このとき

$$1\underset{\text{性質(2)}}{=}P(\Omega)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P(A_1)+P(A_2)+\sum_{n=3}^{\infty}P(A_n) \quad (\because \sigma\text{-加法性})$$
$$=P(A)+P(A^c)+0 \quad (\because (1)\text{より})$$

よって. $P(A^c)=1-P(A)$

(3) ($P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1-P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)$)

(2)より.
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1-P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c\right)$$
$$=1-P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)$$

(4) $A=A\cap\Omega=A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)$ である.

$(B_n)_n$は互いに排反なので $(A\cap B_n)_n$ も互いに排反 ($\because A\cap B_n\subset B_n$).

よって.
$$P(A)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A\cap B_n) \quad (\because \sigma\text{-加法性})$$

(5) $B_n=A_n\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})$ とする. $B_n$ の作り方より, $(B_n)_n$は

互いに排反. しかも. $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ かつ. $B_n\subset A_n$ である. よって

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

($P(B_n)\leq P(A_n)$を用いた. $B\subset A$ なら $A=B\cup(B\setminus A)\cup\phi\cup\phi\cdots$ より

$P(A)=P(B)+P(B\setminus A)+0+0+\cdots=P(B)+P(B\setminus A)\geq P(B)$ である.)

上の議論より, $P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$ ($A_k$, 互いに排反な$(A_k)_k$)でもあることが

わかる.

(1) 続き.

(6). $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cup (A_1 \cap A_2)$ ← 互いに排反

なので.

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) + P(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) + P(A_1 \cap A_2) \\
&= P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2)
\end{aligned}
$$

$(\because A_1 = (A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cup (A_1 \cap A_2)$ かつ $(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cap (A_1 \cap A_2) = \phi)$

$$
= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)
$$

(7) 数学的帰納法を用いる.

(6) より, $N=2$ では成り立っている. $N-1$ まで成り立っているとする.

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) &= P(A_N) + P(A_1 \cup \cdots \cup A_{N-1}) \\
&\quad - P(A_N \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{N-1})) \quad (\because (6) より)
\end{aligned}
$$

$A_N$ を含まない項全部

$$
= P(A_N) + \sum_{m=1}^{N-1} (-1)^{m-1} \left( \sum_{n_1 < \cdots < n_m \le N-1} P(A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_m}) \right)
$$

$A_N$ を含む項全部

$$
- \sum_{m=1}^{N-1} (-1)^{m-1} \left( \sum_{n_1 < \cdots < n_m \le N-1} \underbrace{P((A_{n_1} \cap A_N) \cap \cdots \cap (A_{n_m} \cap A_N))}_{= P(\underbrace{A_N \cap A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_m}}_{m+1 \text{ コの項}})} \right)
$$

$(-1)^m$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m-1} \sum_{1 \le n_1 < \cdots < n_m \le N} P(A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_m}) \\
&= \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m-1} S_m
\end{aligned}
$$

//

(2) ① なってない $(\because \{1,3\} \setminus \{1\} = \{3\}$ であるが, $\{3\}$ は $\mathcal{F}$ に含まれない$)$

② なっている

③ なっている

(σ-加法族の性質から $A \subset B$ $(A, B \in \mathcal{F})$ なら $B \setminus A \in \mathcal{F}$ はすぐ導ける.)

(3) $A_n \in \mathcal{F}$ より $A_n^c \in \mathcal{F}$ よって. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F}$ で. $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{F}$ でもある.

よって. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ である.

(4) $\mathcal{F}_1 = \{\phi, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\phi, \{2\}, \{1,3\}, \Omega\}$ とすると.

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \Omega\}$ である.

しかし. $\{3\} = \{2,3\} \setminus \{2\}$ は $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ に含まれない

(5) $\Omega = \{1,2,3,4,\dots\}$ とする. $\sigma([n])$を$\Omega$の中で$\{1,2,\dots,n\}$の部分集合全体を含む最小の$\sigma$-加法族とする. $\mathcal{F}_n = \sigma([n])$ とすると, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ は$\sigma$-加法族にならない. なぜなら, $A_k = \{2,4,6,\dots,2k\}$とすると, $A_k \in \mathcal{F}_{2k} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ であるが, $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{2n \mid n=1,2,\dots\}$ はどの$n$に対しても $A \in \mathcal{F}_n$ が成り立たない. なぜなら, $\forall B \in \mathcal{F}_n$ は $B \cap \{n+1, n+2, \dots\} = \phi$ または $B \cap \{n+1, n+2, \dots\} = \{n+1, n+2, \dots\}$ のどちらかをみたすが, $A$はこのどちらもみたさない. よって $A \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ となり, $\sigma$-加法性が成り立たない.

(6) $\mathcal{F}$が$\sigma$-加法族になることはすぐに確認できる.
$P$が確率測度になることを示す.

(i) $\forall A \in \mathcal{F}$に対し. $P(A)=0$ 又は $P(A)=1$ より. $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $\Omega = \mathbb{R}$は非可算集合なので. $P(\Omega)=1$

(iii) $A_n \in \mathcal{F}$ ($\forall n$) で. $A_n \cap A_m = \phi$ $(n \neq m)$ とする.
もし, ある$A_n, A_m$ $(n \neq m)$がとも非可算だとすると.
$A_n^c$は可算なので. $A_n^c \supset A_m$ となりえない. つまり
$A_n \cap A_m = \phi$ は成り立たない. よって. $(A_n)_n$ のうち.
非可算集合は高々1つ.

(a) ある$A_n$が非可算集合のとき.
$A_n$以外の $A_m$ $(m \neq n)$は全て可算で. $P(A_m)=0$である.
また. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ は$A_n$を含むので非可算集合で. $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)=1$.
一方で: $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(A_n) + \sum_{k \neq n} P(A_k) = 1$.
よって. $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$.

(b) 全ての$A_n$が可算集合のとき. $\bigcup_n A_n$も可算. よって.
$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. 一方で: $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0$.

(7) 任意の閉集合 $A$ に対し、$A^c$ は開集合。よって $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるが、
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は σ-加法族なので、$(A^c)^c = A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。

(8) $\forall n$ に対し、$(a, b+\frac{1}{n}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。（$(a, b+\frac{1}{n})$ は開集合なので）
ここで、$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b+\frac{1}{n})$ より、$(a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ でもある。

(9) 省略（ノート3を参照）

(10) 一意に定まる。

$P(\{2\}) = P(\{1,2\}) - P(\{1\})$

$P(\{3\}) = 1 - P(\{1\}) - P(\{2\})$

によって、$P(\{1\}), P(\{2\}), P(\{3\})$ が定まる。
$\forall A \in \mathcal{F}$ に対しては $P(A) = \sum_{a \in A} P(a)$ で定まる。

(11) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}] = (0,1)$ である。

(∵) $\forall x \in (0,1)$ は、$x < 1$ なので、ある $n$ が存在して、$x \leqq 1-\frac{1}{n}$ である。
つまり、$x \in (0, 1-\frac{1}{n}]$ である。よって、$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}] \supset (0,1)$
一方、$(0, 1-\frac{1}{n}] \subset (0,1)$ $(\forall n)$ なので、$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}] \subset (0,1)$ でもある。
よって、$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}] = (0,1)$

//

$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1+\frac{1}{n}) = (0,1]$.

証明は略。