演習解答3

(1) $a_1<b_1, a_2<b_2, \dots, a_n<b_n$ とする.

まず. $(-\infty, b_1]\times(-\infty, b_2]\times\cdots\times(-\infty, b_n] \setminus (-\infty, a_1]\times(-\infty, b_2]\times\cdots\times(-\infty, b_n]$

$= (a_1, b_1]\times(-\infty, b_2]\times\cdots\times(-\infty, b_n] \in \sigma(\mathcal{A})$

である. このことを. 各座標にくり返し適用することで

$(a_1, b_1]\times(a_2, b_2]\times\cdots\times(a_n, b_n] \in \sigma(\mathcal{A})$

である. ここで. $b_i \leftarrow b_i - \frac{1}{k}$ とすることで

$A_k = (a_1, b_1-\frac{1}{k}]\times\cdots\times(a_n, b_n-\frac{1}{k}] \in \sigma(\mathcal{A})$

である. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (a_1, b_1)\times\cdots\times(a_n, b_n)$ であるが.

$A_k\in\sigma(\mathcal{A})$ より. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \sigma(\mathcal{A})$ である.

(2) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は $\{(-\infty, a] \mid a\in\mathbb{R}\}$ を含む.

(1)より $\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\cdots\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は $(a_1, b_1)\times\cdots\times(a_k, b_k)$ を含む.

今、開直方体 $(a_1, b_1)\times\cdots\times(a_k, b_k)$ は $\mathbb{R}^k$ の開集合を生成する.

(1次元の場合と同様)

よって. $\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\cdots\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は任意の開集合を含む. つまり

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})\times\cdots\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$

一方で. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})\times\cdots\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることは定義より明らか.

よって. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{B}(\mathbb{R})\times\cdots\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(3) $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{A}_i)$ とする.

$n=2$ で示す.

$A_2 \in \mathcal{A}_2$ を固定する.

$\mathcal{L} = \{A\in\mathcal{F}_1 \mid P(A\cap A_2) = P(A)\cdot P(A_2)\}$

とする. $\mathcal{L}\supset\mathcal{A}_1$ である. $\mathcal{L}$ が λ-システムであることを示せば. $\mathcal{L}=\sigma(\mathcal{A}_1)$ である.

(a) $\Omega\in\mathcal{L}$: $P(\Omega\cap A_2) = P(A_2) = 1\cdot P(A_2) = P(\Omega)P(A_2)$

(b) $A\in\mathcal{L} \Rightarrow A^c\in\mathcal{L}$: $P(A^c\cap A_2) = P(A_2\setminus(A\cap A_2))$

$= P(A_2) - P(A\cap A_2) = P(A_2) - P(A)P(A_2)$

$= P(A_2)(1-P(A)) = P(A_2)\cdot P(A^c)$

(c) $B_n\in\mathcal{L}$ $(n=1,2,\dots)$ (互いに素) $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in\mathcal{L}$:

$P((\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)\cap A_2) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A_2)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n\cap A_2) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)\cdot P(A_2)$

$= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)P(A_2)$

以上より、$\mathcal{L}$はλ-システムなので、$\mathcal{L} \supset \mathcal{F}_1$である。定義より$\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_1$なので、
$\mathcal{L} = \mathcal{F}_1$である。

次に $A_1 \in \mathcal{F}_1$を固定して、

$$\mathcal{L}_2 = \{ A \in \mathcal{F}_2 \mid P(A_1 \cap A) = P(A_1)P(A) \}$$

として、同様の議論をあてはめることで、$\mathcal{L}_2 = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

あとは帰納法により一般のnに対しても成り立つ。

(4) $X_1, \dots, X_n$がr.v.のとき、$X = (X_1, \dots, X_n)$は$\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測。
なぜなら、$X^{-1}((-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]) = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}((-\infty, a_k]) \in \mathcal{F}$である。
$(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]$は$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$を生成するので（(1)より）、
Xは$\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測（∵ 2回目の演習問題(4)）。
よって、$f(X_1, \dots, X_n) = f \circ X$ は可測。

(5) $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$とすると、$f$は連続で、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測。
よって (4)より $f \circ X = X_1 + \cdots + X_n$ は可測。

(6) X_1, X_2が独立同一に$U[0,1]$（一様分布）に従うとき、
その分布関数は $P(X_1 \leqq x_1, X_2 \leqq x_2) = P(X_1 \leqq x_1) \cdot P(X_2 \leqq x_2) = x_1 x_2$
$(x_1, x_2 \in [0,1])$である。これはFと一致する。
このとき、$P(A)$ $(A \in \mathcal{B}([0,1]^2))$は$A$のルベーグ測度と一致する。
特に、$A = \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqq 1\}$なら、

$$P(A) = \frac{\pi}{4}$$

(7) (a) $\{\sup_n X_n \leqq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X_n \leqq x\}}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

$\{\inf_n X_n \leqq x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \leqq x\} \in \mathcal{F}$ より成り立つ。

(b) $\liminf X_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m \geqq n} X_m = \sup_n \inf_{m \geqq n} X_m$ であるが、(a)より
$\inf_{m \geqq n} X_m$はr.v.で、さらに(a)より $\sup_n \inf_{m \geqq n} X_m$ もr.v.

Xがr.v.なら$-X$もr.v.なので、$\liminf(-X_n)$がr.v. $\Rightarrow$ $\limsup X_n$がr.v.

(c) $\forall \omega$ で $\lim X_n(\omega)$ が存在するなら、$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \quad (\forall\omega)$

である。(b) より $\limsup_{n\to\infty} X_n$ は可測なので、$\lim_{n\to\infty} X_n$ も可測。

(9) $P(\max_k |X_k| \geq K) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{|X_k| \geq K\}\right)$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geq K)$$

である。確率の連続性より $\lim_{K\to\infty} P(|X_k| \geq K) = 0$ なので、

十分大きな K_k で $P(|X_k| \geq K_k) \leq \frac{\varepsilon}{n}$ とできる。$K := \max_k K_k$ とおけば

$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geq K) \leq n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$ である。

(10) $\varepsilon > 0$ を任意に固定する。

(9) より、十分大きな K を用いて $P(|X| \geq K) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ とできる。

今 F は連続なので、有界閉区間 $[-K, K]$ において一様連続で

ある。よって、$\exists \delta > 0$ で、$\forall x_1, x_2 \in [-K, K]$ で $|x_1 - x_2| \leq \delta$ なら

$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ とできる。

$|x_1| > K$ または $|x_2| > K$ の時は、

$|F(x_1) - F(\mathrm{sgn}(x_1)K)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $|F(x_2) - F(\mathrm{sgn}(x_2)K)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

であることにより、上の議論と合わせて、$|x_1 - x_2| \leq \delta$ なる任意の

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対し、$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \varepsilon$ とできる。

(11) $\{X_1 = X_2\} \subset \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left\{\frac{k-1}{2^n} < X_1, X_2 \leq \frac{k}{2^n}\right\}$ が任意の n について成立つ。

よって、$P(X_1 = X_2) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{k-1}{2^n} < X_1 \leq \frac{k}{2^n} \wedge \frac{k-1}{2^n} < X_2 \leq \frac{k}{2^n}\right)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{k-1}{2^n} < X_1 \leq \frac{k}{2^n}\right)^2 \quad (\text{独立同一性より})$$

ここで、 $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{k-1}{2^n} < X_1 \le \frac{k}{2^n}\right)^2$

$$\le \sup_k P\left(\frac{k-1}{2^n} < X_1 \le \frac{k}{2^n}\right) \cdot \Bigg\{ \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{k-1}{2^n} < X_1 \le \frac{k}{2^n}\right)}_{=1} \Bigg\}$$

$$\le \sup_k P\left(\frac{k-1}{2^n} < X_1 \le \frac{k}{2^n}\right)$$

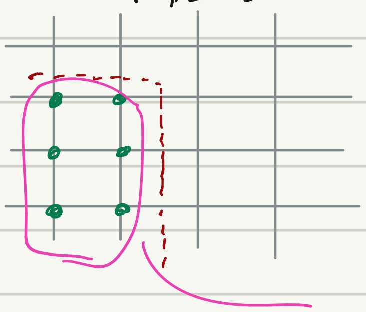
$$= \sup_k F\left(\frac{k}{2^n}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$$

今 F は連続なので、(10) より特に一様連続。
なので、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、n が存在して、右辺 $\le \varepsilon$ とできる。
つまり、$\forall \varepsilon > 0$ で、$P(X_1 = X_2) \le \varepsilon$.
$\varepsilon \searrow 0$ とすることで、$P(X_1 = X_2) = 0$

//

(12) 定義よりすぐ示せるので省略

(13) $n=2$ で略証する。



$$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = \frac{1}{r^2} \# \{ j \in \{1, \ldots, r\} \mid j \le x_1 \} \times \# \{ i \in \{1, \ldots, r\} \mid i \le x_2 \}$$
$$= \frac{1}{r} \# \{ j \mid j \le x_1 \} \times \frac{1}{r} \# \{ i \mid i \le x_2 \}$$
$$= P(X_1 \le x_1) P(X_2 \le x_2)$$

よって、$F(x_1, x_2) = F(x_1) F(x_2)$.
つまり 独立。

//

(14) 省略。