演習解答 7

(1) 省略

(2) X, Y が独立同一，連続分布を持つとき．$P(X=Y)=0$ となることは演習問題3，(1) で示した．同一分布でない場合も同様に $P(X=Y)=0$ が示せる．よって $Y \leftarrow -Y$ にすれば．

$P(X=-Y)=0$ つまり $P(X+Y=0)=0$ である．

(3) 第3回~~講義~~より、X, Y が独立 $\Leftrightarrow$ $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し，

$$P(X \in A_1 \cap Y \in A_2) = P(X \in A_1) \cdot P(Y \in A_2)$$

である．よって $f(X), f(Y)$ が独立 $\Leftrightarrow$ $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し．

$$P(f(X) \in A_1 \cap f(Y) \in A_2) = P(f(X) \in A_1) P(f(Y) \in A_2)$$

である．

今 X, Y は独立なので、

$$\begin{aligned} P(f(X) \in A_1 \cap f(Y) \in A_2) &= P(X \in f^{-1}(A_1) \cap Y \in f^{-1}(A_2)) \\ &= P(X \in f^{-1}(A_1)) \cdot P(Y \in f^{-1}(A_2)) \\ &= P(f(X) \in A_1) \cdot P(f(Y) \in A_2) \end{aligned}$$

つまり，$f(X), f(Y)$ は独立．

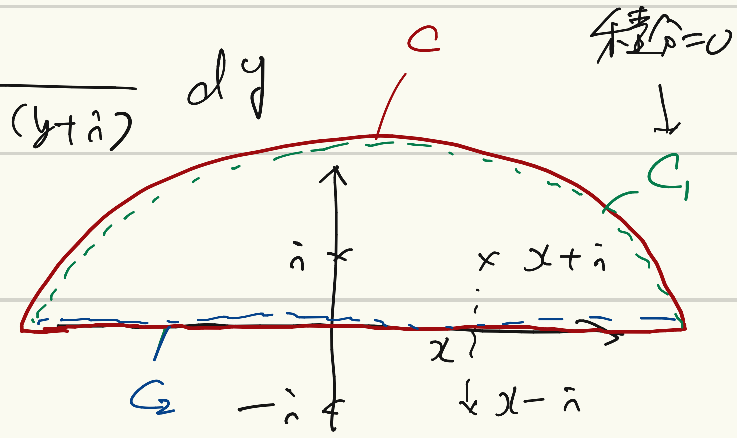
(4) $f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)}$ に対して示す. $x\neq 0$ とする.

$$f*f(x)=\int f(x-y)f(y)\,dy$$

$$=\int \frac{1}{\pi((x-y)^2+1)}\cdot\frac{1}{\pi(y^2+1)}\,dy$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int \frac{1}{(x-y+i)(x-y-i)(y-i)(y+i)}\,dy$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_C (\,)\,dy$$



$$=\frac{1}{\pi^2}2\pi i\left(\frac{(-1)}{(x-i-(x+i))(x+i-i)(x+i+i)}+\frac{1}{(x-i+i)(x-i-i)(i+i)}\right)$$ (留数定理)

$$=\frac{1}{\pi^2}2\pi i\cdot\frac{2x}{(2i)x(x+2i)(x-2i)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{x^2+4}$$

($x=0$のとき). $f*f(x)=\frac{1}{\pi^2}\int\frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\frac{1}{(y+i)^2(y-i)^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{\pi^2}2\pi i\cdot\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)\Bigg|_{z=i}\right]=\frac{1}{2\pi}$$

以上より. $f*f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{2}{(x^2+4)}$ $(x\in\mathbb{R})$ //

→ コーシー分布

(5) $\begin{cases} u = \dfrac{x}{x+y} \\ v = y \end{cases}$ とおく。 $\begin{cases} x = -\dfrac{uv}{u-1} \\ y = v \end{cases}$ である。

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{v}{u-1} + \frac{uv}{(u-1)^2} & 0 \\ -\frac{u}{u-1} & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{v}{(u-1)^2} & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{v}{(u-1)^2}$$

よって、

$$p(u,v) = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{uv}{1-u}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda\frac{uv}{1-u}} \cdot v^{\beta-1} e^{-\lambda v} \cdot \frac{v}{(u-1)^2}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot (1-u)^{-(1+\alpha)} u^{\alpha-1} \cdot v^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-\lambda\left(1+\frac{u}{1-u}\right)v}$$

である。vについては、ガンマ分布の密度関数の形をしているので、

$$\int p(u,v)\,dv = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-u)^{-(1+\alpha)} \cdot u^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\left(\frac{\lambda}{1-u}\right)^{\alpha+\beta}}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot (1-u)^{\beta-1} u^{\alpha-1} \quad : \text{ベータ分布}$$

$$(0 \le u \le 1)$$

(6) (i) fは連続関数なので、$(x_n, w_n) \in \mathrm{epi}(f)$ が $(x_n, w_n) \to (x, w)$ なら、

$\forall n$ で $f(x_n) \leqq w_n$ であることより、

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \limsup f(x_n) \leqq \limsup w_n = w$$

となるので、$f(x) \leqq w$。つまり、$(x, w) \in \mathrm{epi}(f)$

(ii) (i)より、$\mathrm{epi}(f)$ に支持超平面の定理を適用して、

$(x^T, f(x))^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ に対し、ある $\begin{pmatrix} g \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ で $\begin{pmatrix} g \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$ なるものが存在して、

$$(g^T, \beta)\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \leqq (g^T, \beta)\begin{pmatrix} x' \\ w' \end{pmatrix} \quad \left({}^\forall (x', w') \in \mathrm{epi}(f)\right)$$

である。あとはβが正の実数であることを示せば良い。

$\begin{pmatrix} x' \\ \omega' \end{pmatrix}$ として $\begin{pmatrix} x \\ f(x)+1 \end{pmatrix}$ を取ってみると、

$$(g^T, \beta)\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \leqq (g^T, \beta)\begin{pmatrix} x \\ f(x)+1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \beta f(x) \leqq \beta(f(x)+1) \iff 0 \leqq \beta$$

となり、$0 \leqq \beta$ を得る。ここで、もし $\beta = 0$ とすると、

$$g^T x \leqq g^T x' \quad (\forall x' \in \mathbb{R}^d)$$

が成り立ってしまうので、$g = 0$ となる。すると $\begin{pmatrix} g \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$ に矛盾する。

よって、$\beta > 0$ である。

以上より、$\left(\frac{g}{\beta}\right)^T x + f(x) \leqq \left(\frac{g}{\beta}\right)^T x' + \omega' \quad (\forall (x', \omega') \in \mathrm{epi}(f))$

で、特に $\tilde{g} = -\frac{g}{\beta}$ として、$\omega' = f(x')$ とすると、

$$f(x') \geqq \tilde{g}^T(x' - x) + f(x) \quad (\forall x' \in \mathbb{R}^d)$$

である。つまり $\partial f(x) \neq \phi$ で $\tilde{g} \in \partial f(x)$ である。 //

(7) $\|X\|_\alpha = \left(E[|X|^\alpha]\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(E[|X|^{\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta}}]\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\leqq \left(E[|X|^\beta]\right)^{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\alpha}} = \left(E[|X|^\beta]\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

(Jensenの不等式 $f(x) = |x|^p$ $(p<1)$ は凹関数)

凹なる f に対し、
$E[f(x)] \leqq f(E[x])$

(8) (7) より $\|X\|_1 \leqq \|X\|_2$ なので、$\|X\|_2 < \infty$ なら $\|X\|_1 < \infty$

$$E[(X-\mu)^2] = E[(X-a+a-\mu)^2] = E[(X-a)^2] + 2E[(X-a)(a-\mu)] + (a-\mu)^2$$

$$= E[(X-a)^2] - (a-\mu)^2 \leqq E[(X-a)^2]$$ //

$X \in L^2$ より、これらの積分は全てO.K.

(9) $X_n \nearrow X$ であることより、$X_1 \leq X_n \leq X$ かつ $X_n \nearrow X$ である。

このとき単調収束定理が適用できて（$E[X]=\infty$ でも成り立つ）

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n - X_1] = E[\lim_{n\to\infty}(X_n - X_1)] = E[X - X_1]$$

が成り立つが、$X - X_1 \geq 0$ より、$E[X - X_1] = E[|X - X_1|]$

今、$E[X_n]$ は単調非減少なので、$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \sup_n E[X_n] < \infty$

$E[X_1] < \infty$ でもあるので、$E[|X - X_1|] < \infty$ である。

$\infty > E[|X - X_1|] \geq E[|X|] - E[|X_1|]$ と、$E[|X_1|] < \infty$ より、

$E[|X|] < \infty$ でもある。つまり $X \in L^1$ である。

$E[X_n] \nearrow E[X]$ は上で示した通りである。

(10)
$$\begin{aligned} E[(X+Y)^p] &= 2^p E\left[\left(\frac{X+Y}{2}\right)^p\right] \\ &\leq 2^p\left(\frac{1}{2}E[X^p] + \frac{1}{2}E[Y^p]\right) \\ &= 2^{p-1}\left(E[X^p] + E[Y^p]\right) \end{aligned}$$

$f(x) = |x|^p$ $(p \geq 1)$ は凸関数