演習解答8

(1) $X_n \xrightarrow{P} X$ なら、$\forall k \geq 1$ に対し、$\exists n_k$ で $P(|X_{n_k}-X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{2^k}$ とできる。（ただし、$\varepsilon>0$ は任意に固定）。

よって

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_{n_k}-X| \geq k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$$

より、$A_n := \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$ とすれば、Borel-Cantelli より

$$P(\limsup_{k\to\infty} A_{n_k}) = 0$$

つまり、$P\left(\limsup_{k\to\infty} |X_{n_k}-X| \geq \varepsilon\right) = 0$ である。

ε は任意なので、$\lim_{\varepsilon \to 0}$ を取ることで、$|X_{n_k}-X| \longrightarrow 0$ (a.s.) を得る。

(2) (a) $\forall \varepsilon>0$, $\forall \delta>0$ に対し、$\exists N$ で

$$\sup_{n \geq N} P(|X_n - X| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{\delta}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\sup_{n,m \geq N} P(|X_n - X_m| \geq \varepsilon) &\leq \sup_{n,m \geq N} P(|X_n - X + X - X_m| \geq \varepsilon) \\
&\leq \sup_{n,m\geq N} P\left(|X_n - X| \geq \tfrac{\varepsilon}{2} \cup |X_m - X| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq \sup_{n \geq N} P(|X_n - X| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) + \sup_{m \geq N} P(|X_m - X| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) \\
&\leq \delta
\end{aligned}$$

(b) (i) は自明

（$\forall k, m \geq n_j$ で $P(|X_k - X_m| > 2^{-j}) < 2^{-j}$ なる n_j を取ってくる
n_{j+1} は $n_{j+1} \geq n_j$ なる中で、↑これを $j \leftarrow j+1$ でみたすものをとってくる。）

(ii) $X_{n_j} = \sum_{i \le j} (X_{n_i} - X_{n_{i-1}})$

で. X_{n_j} が収束するには. $\lim_{j \to \infty} \sum_{i \le j} |X_{n_i} - X_{n_{i-1}}|$ が収束すれば十分.

$A_j = \{ |X_{n_j} - X_{n_{j-1}}| > 2^{-(j-1)} \}$ とおくと.

$P(A_j) < 2^{-(j-1)}$

である. $\sum_j P(A_j) < \infty$ より $P(A_j \ \text{i.o.}) = 0$ である.

つまり. a.s. で. ある N が存在して. $\forall j \ge N$ では

$|X_{n_j} - X_{n_{j-1}}| \le 2^{-(j-1)}$

である. このとき. $\sum_j |X_{n_j} - X_{n_{j-1}}|$ は収束するので. 結局 X_{n_j} も

概収束する.

(iii) X_n はコーシー in prob より $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ に対し $\exists N$ で

$\sup_{n, m \ge N} P(|X_n - X_m| \ge \frac{\varepsilon}{2}) \le \frac{\delta}{2}$ とできる.

また、$X_{n_j} \xrightarrow{a.s.} X$ より. $X_{n_j} \xrightarrow{P} X$ でもある. よって. 同様に. $\exists N'$ で.

$\sup_{j : n_j \ge N'} P(|X_{n_j} - X| \ge \frac{\varepsilon}{2}) \le \frac{\delta}{2}$

である. 今 $\tilde{N} = \max(N, N')$ とおくと.

$$\sup_{n \ge \tilde{N}} P(|X_n - X| \ge \varepsilon)$$

$$\le \sup_{\substack{n \ge \tilde{N} \\ n_j \ge \tilde{N}}} \left(P(|X_n - X_{n_j}| \ge \tfrac{\varepsilon}{2}) + P(|X_{n_j} - X| \ge \tfrac{\varepsilon}{2}) \right)$$

$\le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \le \delta$. つまり. $X_n \xrightarrow{P} X$ である. //

(3) $E[|X_n|] = E[|X_n| \mathbb{1}\{|X_n| \geqq a\}] + E[|X_n| \mathbb{1}\{|X_n| < a\}]$

$$\leqq \sup_n \int_{|X_n| \geqq a} |X_n| \, dP + a$$

より、十分大きな a で第1項は有限（M_a とおく）ので、

$$\sup_n E[|X_n|] \leqq M_a + a < \infty$$

となる。 //

(4) (1)より $X_{n_j} \xrightarrow{a.s.} X$ となる部分列を取って来れる。

今、X_n は単調増大なので、$\forall n \geq n_j$ において $X_{n_j} \leq X_n \leq X$ である。これより $X_{n_j} \nearrow X$ (a.s.) から $X_n \nearrow X$ (a.s.) でもある。

(5) ($\Longrightarrow$) $X_n \xrightarrow{P} X$ なら、$X_n \xrightarrow{P} X$ の定義より
その部分列もまた $X_{n_k} \xrightarrow{P} X$ である。
すると(1)より、そのさらに部分列を取ることで $X_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.s.} X$ とできる。

($\Longleftarrow$)

もし $X_n \xrightarrow{P} X$ が成り立たないとすると、$\forall N$ に対し
$\exists n \geq N$ で $P(|X_n - X| \geqq \varepsilon) \geqq \delta$ とできる。($\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$)
そのような部分列を $(X_{n_k})_k$ とおく。($\inf_k P(|X_{n_k} - X| \geqq \varepsilon) \geqq \delta$)

しかし、仮定より
この $(X_{n_k})_k$ から部分列をとって来て、$X_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.s.} X$ とできる。
これは、$X_{n_{k_j}} \xrightarrow{P} X$ でもあるが、このとき、

$$\lim_{j \to \infty} P(|X_{n_{k_j}} - X| \geqq \varepsilon) = 0$$

となってしまうので、$\inf_k P(|X_{n_k} - X| \geqq \varepsilon) \geqq \delta > 0$ に矛盾。

(6) (a)

$\forall \varepsilon, \delta > 0$ に対し $\exists N$ で $P(|X_n - X| \geqq \varepsilon) \leqq \delta$ かつ $P(|Y_n - Y| \geqq \varepsilon) \leqq \delta$
$(\forall n \geqq N)$

とできるので、$\forall n \geqq N$ で

$$
\begin{aligned}
&P(|X_n + Y_n - (X+Y)| \geqq 2\varepsilon) \\
\leqq\ & P(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geqq 2\varepsilon) \\
\leqq\ & P(|X_n - X| \geqq \varepsilon) + P(|Y_n - Y| \geqq \varepsilon) \\
\leqq\ & 2\delta
\end{aligned}
$$

である。 つまり $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$

(b)

(5) を用いて示す. 任意の部分列 $(X_{n_k} Y_{n_k})_k$ に対し、
さらなる部分列 $(n'_j)_j \subset (n_k)_k$ をとってくることで、

$$X_{n'_j} \xrightarrow{a.s.} X$$

とできる. $(n'_j)_j$ のさらなる部分列 $(n''_j)_j$ を持ってくることで

$$Y_{n''_j} \xrightarrow{a.s.} Y$$

ともできる. このとき

$$X_{n''_j} Y_{n''_j} \xrightarrow{a.s.} XY$$

である. よって $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$ //

(X_n, Y_n の緊密(タイト)性を使っても良い)

(7)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overline{X}_n + (\overline{X}_n)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X}_n)^2
\end{aligned}
$$

ここで、 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{a.s.} E[X_1^2]$ (大数の強法則)

$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$

より、 $(\overline{X}_n)^2 \xrightarrow{a.s.} \mu^2$ でもある。

このことから、

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow{a.s.} E[X_i^2] - \mu^2 = \sigma^2$$

特に $\xrightarrow{P} \sigma^2$ でもある. //

(8)

(a) $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ なら a.s. で任意の $\varepsilon \geq 0$ に対し $\exists N$ で $\forall n \geq N$ で $|X_n| \leq \varepsilon$ とできる。

このとき

$$|\overline{X}_n| = \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} X_i + \frac{1}{n}\sum_{i=N}^{n} X_i \right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} X_i\right| + \frac{1}{n}\sum_{i=N}^{n} |X_i|$$

$$\leq \frac{1}{n}\underbrace{\max_{1\leq i\leq N}|X_i|}_{\text{有限}} + \left(\frac{n-N}{n}\right)\cdot\varepsilon \xrightarrow{n\to\infty} \varepsilon$$

ε は任意なので $|\overline{X}_n| \xrightarrow{a.s.} 0$ である。

(b) $\|\overline{X}_n\|_p \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|_p$ であるが、$\|X_i\|_p \longrightarrow 0$ より

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|_p \longrightarrow 0$ である。つまり $\|\overline{X}_n\|_p \longrightarrow 0$ //

(c) レポート課題

(d) $\overline{X}_n \xrightarrow{p} 0 \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X}_n \xrightarrow{p} 0 \\ \left(\frac{n}{n+1}\right)\overline{X}_n \xrightarrow{p} 0 \end{cases} \Longrightarrow \overline{X}_n - \left(\frac{n-1}{n}\right)\overline{X}_{n-1} \xrightarrow{p} 0$ ((6)より)

ここで $\overline{X}_n - \left(\frac{n-1}{n}\right)\overline{X}_{n-1} = \frac{X_n}{n}$ なので $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{p} 0$ である。

(9) 省略 (ヒント通りにやれば解ける)

(10)

$X_1, \dots, X_n$ のうちどれかが x より大 $\Leftrightarrow M_n > x$

(11) (a) $P(M_n > x) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i > x\}\right)$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} P(X_i > x) = n P(X_1 > x)$$

(i.i.d. なので)

(b) ($\Rightarrow$) $\varepsilon > 0$ は固定する。

$$P\left(\frac{M_n}{n} \leq \varepsilon\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq n\varepsilon\}\right)$$

$$\underset{\text{独立}}{=} P(X_i \leq n\varepsilon)^n = (1 - P(X_1 > n\varepsilon))^n$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} \left(P\left(\frac{M_n}{n} \leq \varepsilon\right)\right)^{\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} (1 - P(X_1 > n\varepsilon))^{n\varepsilon}$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \exp(-n\varepsilon P(X_1 > n\varepsilon))$$

よって、$\limsup_{n\to\infty} n\varepsilon P(X_1 > n\varepsilon) \leq 0$ である。

一方 $P(\cdots) \geq 0$ より、$\liminf n\varepsilon P(X_1 > n\varepsilon) \geq 0$ なので、

$$\lim_{n\to\infty} n\varepsilon P(X_1 > n\varepsilon) = \lim_{x\to\infty} x P(X_1 > x) = 0$$

($\Leftarrow$) $\varepsilon > 0$ は任意。

$$\lim P\left(\frac{M_n}{n} > \varepsilon\right) = \lim P(M_n > n\varepsilon)$$

$$\leq n P(X_1 > n\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon n P(X_1 > n\varepsilon)$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

つまり、$\frac{M_n}{n} \xrightarrow{P} 0$ //