演習問題

(1) $X: \Omega \to \Omega'$ (可測関数であるとは限らない)

$A_1, A_2, \ldots \subset \Omega'$ に対し、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

を示せ。

また、$A \subset \Omega'$ に対し、$\left(X^{-1}(A)\right)^c = X^{-1}(A^c)$ も示せ。

(2) $\mathcal{F}'$ を Ω' の部分集合を元にもつσ-加法族とする。

(1)と同じ設定で、$X^{-1}(\mathcal{F}') := \{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}'\}$

が σ-加法族になることを示せ。

(3) 集合族 $\mathcal{A}$ に対し、$\sigma(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ を含む最小のσ-加法族とする。$\mathcal{A}'$ を Ω' の部分集合からなる集合族とする。

このとき、$X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}')) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ を示せ。

ヒント：枚 P.3の証明法を参考にせよ。

(4) 今、ある $\mathcal{A}'$ が $\mathcal{F}'$ を生成しているとする。つまり

$\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{A}')$ とする。このとき、$X: \Omega \to \Omega'$ が

$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-可測であるための必要十分条件は、

$$X^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{F}$$

であることを示せ。

(5) (4)を使って、可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対し、$X: \Omega \to \mathbb{R}$ が

$X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ $(\forall a \in \mathbb{R})$ をみたすなら、(つまり、r.v. なら)

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ をみたすことを示せ。

(6) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ が確率変数のとき、$|X|$ も確率変数になることを示せ。また、逆は必ずしも成り立たないことに注意せよ。

(7) $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{F}$ $(i=1,2,3,\ldots,m)$ を用いて

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$ は確率変数であることを示せ。

ただし $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$ とする。

(このような X を単関数と言う)

(8) 正規分布の密度関数 f が $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ をみたすことを示せ。

↑ をリーマン~~積分~~で良い

(9) ポアソン分布の確率質量関数 $f(k)$ が

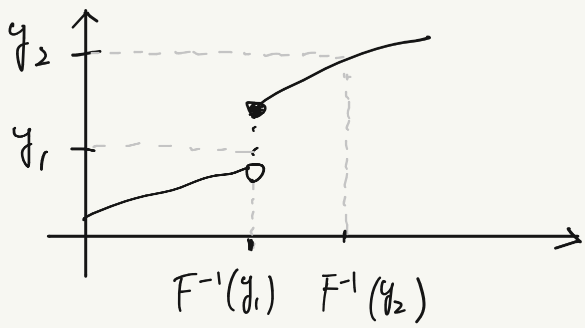
$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = 1$$ をみたすことを示せ。

(10) 分布関数 F に対し、$A(y) := \{x \mid F(x) \geq y\}$ とおく。$A(y)$ は閉集合となることを示せ。

(11) $F(x) = P(X \leq x)$ が連続分布であるとき、$Y(\omega) = F(X(\omega))$ は確率変数で、Y の分布は一様分布 $P(Y \leq y) = y$ $(0 \leq y \leq 1)$ であることを示せ。

(次ページに続く)

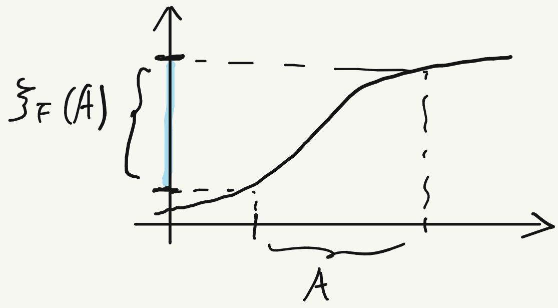
$F^{-1}(y) = \inf\{x \mid F(x) \geq y\}$ とする。



また、

$\xi_F(A) = \{x \in (0,1] \mid F^{-1}(x) \in A\}$

とする。



(12) $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \xi_F(A) \in \mathcal{B}((0,1])\}$

とする。

(i) $\mathcal{A}$ は区間 $(a,b] \subset \mathbb{R}$ を含むことを示せ

(ii) $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$ であることを示せ

(iii) $A \in \mathcal{A}$ なら、$A^c \in \mathcal{A}$ であることを示せ。

(iv) $A_n \in \mathcal{A}$ $(n=1,2,\cdots)$ なら、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ であることを示せ。

(v) これらより、$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることを示せ。

(13) ルベーグ測度 μ に対して、$P_F(A) := \mu(\xi_F(A))$

とすれば、P_F が $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度になり、

$P_F((-\infty, x]) = F(x)$ をみたすことを確かめよ。

(補足：$((0,1], \mathcal{B}((0,1]))$ 上のルベーグ測度は $\mu((a,b]) = b-a$ をみたす測度（一様分布）である。その存在は仮定する。)

(14) Bernoulli 分布の分布関数を書け.

(15) $F(x-) := \lim_{y \nearrow x} F(y)$ とした時. $F(x-) = P(X<x)$

であることを示せ. (ヒント: 確率の連続性)

(16) F の不連続点は高々可算個であることを示せ.

(ヒント: $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) - F(x-) \geqq \frac{1}{n}\}$ を考え.

A_n の元の個数を見積もれ)