演習問題

(1) 二項分布, ポアソン分布, 正規分布, ガンマ分布の再生性を畳み込みを用いて示せ.

(2) X, Y が独立でともに連続分布であるとき $P(X+Y=0)=0$ を示せ.

(3) X, Y が独立なとき. ボレル可測な f, g に対し $f(X), g(Y)$ も独立であることを示せ.

(4) 2つの独立同一なコーシー分布に従うとして, その和の p.d.f. を畳み込みを用いて計算せよ. (難)

(5) X, Y がそれぞれ独立にガンマ分布 $G(\lambda, \alpha)$, $G(\lambda, \beta)$ に従うとき,

λは共通

$$Z = \frac{X}{X+Y}$$

の従う分布の p.d.f. を求めよ.

(6) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を凸関数とする.

← $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ となると話は変わるので注意

(i) $\mathrm{epi}(f) = \{(x, w) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid f(x) \leq w\}$

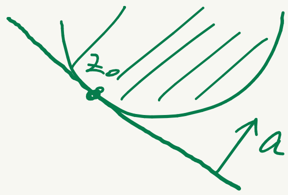
は閉凸集合であることを示せ. なお f が連続関数になることは使って良い.

(ii) 非空な閉凸集合 $H \in \mathbb{R}^{d+1}$ に対し, 以下が知られている

「H の境界上の点 $z_0 \in \partial H$ に対し, ある $a \in \mathbb{R}^{d+1}$ ($a \neq 0$) が存在して,

$$a^T z_0 \leq \inf_{z \in H} a^T z$$

が成り立つ」



(支持超平面定理, 分離定理)

これと (i) を用いて. 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ において.

ある正の実数 β と $g \in \mathbb{R}^d$ が存在して.

$$g^T x + \beta f(x) \leq g^T x' + \beta w \quad (\forall (x', w) \in \mathrm{epi}(f))$$

が成り立つことを示し. $\partial f(x) \neq \phi$ であることを示せ.

(7) $0 < \alpha < \beta < \infty$ に対し、

$$\|X\|_\alpha \leq \|X\|_\beta \qquad (\alpha, \beta < 1 \text{ でも良い})$$

を示せ。

(8) $X \in L^2$ のとき、$X \in L^1$ でもあることを示せ。

また、このとき、$\mu = E[X]$ に対し、

$$E[(X-\mu)^2] \leq E[(X-a)^2] \qquad (\forall a \in \mathbb{R})$$

を示せ。

(9) $X_n \in L^1$ $(\forall n)$ とする。また、$\sup_n E[X_n] < \infty$ とする。

$X_n \nearrow X$ であるとき、$X \in L^1$ であり、特に

$$E[X_n] \nearrow E[X]$$

となることを示せ。

(10) $X \geq 0$, $Y \geq 0$ として、$p \geq 1$ に対し、

$$E[(X+Y)^p] \leq 2^{p-1}\left(E[X^p] + E[Y^p]\right)$$

を示せ。