確率数理工学　マルコフ連鎖練習問題

問 1 N 個のボールがある．このボールを 2 つの壷 A,B に分けて入れる．N 個のボールから等確率で 1 つ選び，それを今入れられている壷からもう一方の壷に移し替える作業を繰り返す．状態空間 $I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ に対し，$X_n \in I$ を時刻 n に壷 A に入っているボールの数として，X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ の遷移に関するマルコフ連鎖を考える．

(i) このマルコフ連鎖の遷移確率行列を書き下せ．
(ii) このマルコフ連鎖は既約か既約でないか答えよ．その根拠も述べよ．
(iii) このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ．
(iv) $N = 3$ の時，極限分布は存在するかしないか答えよ．その根拠も述べよ．

問 2 $2m$ 個の状態からなるマルコフ連鎖で，図 1 に与えられるような状態遷移を考える．すなわち，状態 $i \in \{1, \ldots, m\}$ からは，確率 p' で状態 $i+1$ に，確率 q' で状態 $i-1$ に，確率 r' で状態 $i+m$ に遷移するとする．ただし，$i = m$ の場合は $i+1$ を 1 に，$i = 1$ の場合は $i-1$ を m で置き換える．同様に状態 $i \in \{m+1, \ldots, 2m\}$ からは，確率 p で状態 $i+1$ へ，確率 q で状態 $i-1$ に遷移する．ただし，$i = 2m$ の場合は $i+1$ を $m+1$ に，$i = m+1$ の場合は $i-1$ を $2m$ で置き換える．ここで，p, q, p', q', r' はいずれも正の実数 $(0 < p, q, p', q', r')$ で，$p + q = 1$ および $p' + q' + r' = 1$ を満たすものとする．

(i) $2m$ 個の状態を相互到達可能性によって同値類に分けよ．また，これらの状態を非再帰的状態と再帰的状態に分類せよ．
(ii) 非再帰的状態から再帰的状態への平均到達時間を求めよ．
(iii) 定常分布を求めよ．
(iv) 極限分布の存在を m の遇奇で場合分けして論じよ．

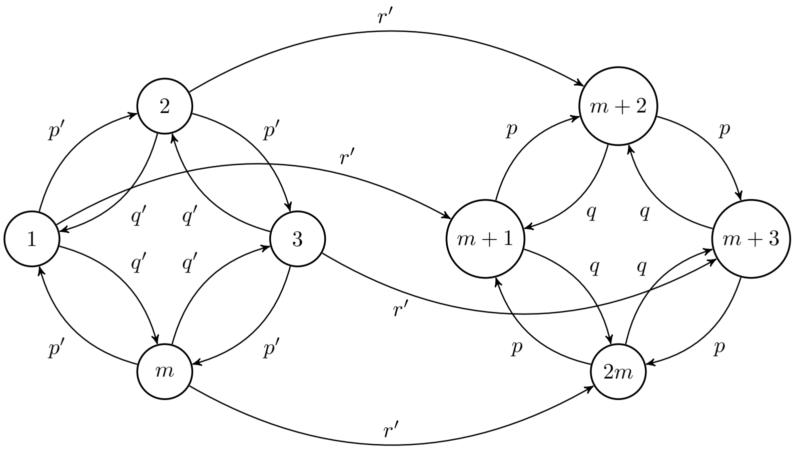

図 1　マルコフ連鎖の状態遷移図

問 3　マルコフ連鎖の定常分布 π がエルゴード的であるとは，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}P^{(\ell)}(i,j)=\pi(j)$ $(\forall i\in\mathrm{supp}(\pi),\ \forall j\in I)$ を満たすものとする (ただし，$\mathrm{supp}(\pi)=\{i\in I\mid\pi(i)>0\}$).

(i) あるエルゴード的定常分布 π に対し $\mathrm{supp}(\pi)$ は既約かつ閉であることを示せ.

(ii) 今，二つの異なるエルゴード的定常分布 ν,μ が存在するとき，$\mathrm{supp}(\mu)$ と $\mathrm{supp}(\nu)$ が互いに到達不可能であることを示せ.

問 4　一次元対称ランダムウォークを考える．すなわち，状態空間は $\mathbb{Z}$ であり，遷移確率は $P(i,i+1)=1/2,\ P(i,i-1)=1/2\ (i\in\mathbb{Z})$ で与えられる．今，$X_0=0$ として，以下に答えよ.

(i) このマルコフ連鎖は定常分布を持つか？定常分布が存在する場合はそれを求め，存在しない場合はその証明を与えよ.

(ii) $X_n/\sqrt{n}$ は何らかの分布に法則収束するか？収束しないならその証明を，収束するなら収束先の分布を求めよ.

(iii) 遷移確率を修正して，ある $q>0$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
&P(i,i+1)=P(i,i-1)=(1-q)/2,\ P(i,i)=0,\ P(i,0)=q\ (i\neq 0,\pm 1),\\
&P(1,2)=P(1,1)=(1-q)/2,\ P(1,0)=q,\\
&P(-1,-2)=P(-1,-1)=(1-q)/2,\ P(-1,0)=q,\\
&P(0,1)=1/2,\ P(0,-1)=1/2,\ P(0,0)=0,
\end{aligned}
$$

とする.

(a) このマルコフ連鎖に定常分布が一意的に存在することを示せ.

(b) その定常分布を求めよ.