演習解答2

(1)　($\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$)

(a) (⊂)　$A_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $(\forall i)$ より $X^{-1}(A_i) \subset X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ である。
よって　$\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i) \subset X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ である。

(b) (⊃)　一方で、$\forall x \in X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ に対し、$X(x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ より
ある k が存在して、$X(x) \in A_k$ である。つまり $x \in X^{-1}(A_k)$.
よって、$X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)$

(a),(b)より = が成り立つ

($X^{-1}(A)^c = X^{-1}(A^c)$)

$$x \in X^{-1}(A)^c \iff X(x) \notin A \iff X(x) \in A^c \iff x \in X^{-1}(A^c)$$

(2)
(i)　$\Omega = X^{-1}(\Omega')$ より、$\Omega \in X^{-1}(\mathcal{F}')$ である

(1)より

(ii)　$A \in X^{-1}(\mathcal{F}') \Rightarrow {}^\exists B \in \mathcal{F}'$ s.t. $A = X^{-1}(B) \Rightarrow {}^\exists B \in \mathcal{F}'$ s.t. $A^c = X^{-1}(B^c)$
$\Rightarrow {}^\exists B' \in \mathcal{F}'$ s.t. $A^c = X^{-1}(B') \Rightarrow A^c \in X^{-1}(\mathcal{F}')$

(iii)　σ-加法性も同様に(1)を用いて示せる。

(3)
• (2)より、$X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$ は σ-加法族。また、$X^{-1}(\mathcal{A}') \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$ である。
よって、$\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$ である。

• ノート2のP.3と同様に示す。　$\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{A}')$ と書く。

$$\mathcal{F}_0 := \{ A \in \mathcal{F}' \mid X^{-1}(A) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) \}$$

とする。定義より、$\mathcal{A}' \subset \mathcal{F}_0$ かつ $X^{-1}(\mathcal{F}_0) \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ である。
$\mathcal{F}_0$ が σ-加法族であることを示す。それが示せれば、$\sigma(\mathcal{A}') \subset \mathcal{F}_0$ なので、
$X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}')) \subset X^{-1}(\mathcal{F}_0) \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ が示せる。σ-加法族であることは以下で示せる。

(i)　$X^{-1}(\Omega') = \Omega \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ より、$\Omega' \in \mathcal{F}'$ である。

(ii)　$A \in \mathcal{F}_0$ なら、$X^{-1}(A) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) \Rightarrow X^{-1}(A^c) = (X^{-1}(A))^c \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$
$\Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_0$

(iii)　$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$ なら、$X^{-1}(A_n) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ $(\forall n) \Rightarrow X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$
$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_0$

この2つを合わせて $\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$ を得る。

(4) (3)より $X^{-1}(\mathcal{F}')=X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))=\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ である.

よって.

$$
\begin{aligned}
X\text{が}\ \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-可測} &\iff X^{-1}(\mathcal{F}')\subset\mathcal{F}\\
&\iff X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))\subset\mathcal{F}\\
&\iff \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))\subset\mathcal{F}\\
&\iff X^{-1}(\mathcal{A}')\subset\mathcal{F}
\end{aligned}
$$

(∵) (⟹) $X^{-1}(\mathcal{A}')\subset\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))\subset\mathcal{F}$

(⟸) $\mathcal{F}$はσ-加法族なので. $X^{-1}(\mathcal{A}')\subset\mathcal{F}$ なら. $X^{-1}(\mathcal{A}')$を含む最小のσ-加法族は $\mathcal{F}$に含まれる. つまり $\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))\subset\mathcal{F}$.

(5) $\mathcal{A}'=\{(-\infty,a]\mid a\in\mathbb{R}\}$ とすると. $\sigma(\mathcal{A}')=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ より.

(4)を用いると. $X^{-1}(\mathcal{A}')\subset\mathcal{F}\iff X$は $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測

(6) ・連続関数gに対し. $g\circ X$は可測である. 特に. $g(x)=|x|$ とすれば. $|X|$の可測性を得る.

・反例: $(\Omega,\mathcal{F})=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$とする. Aを Borel 非可測集合とする.
$X(\omega)=\mathbb{1}_A(\omega)-\mathbb{1}_{A^c}(\omega)$ とすると. Xは非可測 (r.v.ではない).
しかし. $|X(\omega)|=1$ ($^\forall\omega\in\Omega$)より. $|X|$は可測.

(7) $g:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ を $g(x_1,\dots,x_m)=x_1+\cdots+x_m$ とすると. gは連続で特に. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測. m個のr.v. $X_1,\dots,X_m$に対し. $X=(X_1,\dots,X_m)$とすると. Xは $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-可測である. ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$は $(-\infty,a_1]\times\cdots\times(-\infty,a_m]$ で生成されるので)

よって. $g\circ X(\omega)=X_1(\omega)+\cdots+X_m(\omega)$ は可測.

今 $X_i=a_i\mathbb{1}_{A_i}$ は. $a_i\geq 0$ のとき.

$x\geq a_i$ なら $X^{-1}((-\infty,x])=\Omega\in\mathcal{F}$

$0\leq x<a_i$ なら $X^{-1}((-\infty,x])=A_i^c\in\mathcal{F}$

$x<0$ なら $X^{-1}((-\infty,x])=\phi\in\mathcal{F}$

である. $a_i<0$ のときも同様.

($\sum a_i\mathbb{1}_{A_i}=\sum a_j'\mathbb{1}_{A_j'}$ と disjointな(A_j')を用いて書けることを用いれば より直接的に示せる.)

(8) 省略

(9) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}$ $(\lambda>0)$ より. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=1$.

(10) $x^* := \inf_{x\in\mathbb{R}} \{x \mid F(x) \geq y\}$ とすると. $x > x^*$ なら $x \in A(y)$ で.
$x < x^*$ なら $x \notin A(y)$ である.

$x^* \in A(y)$ なら $A(y) = [x^*, \infty)$ で閉集合であることが示される.

定義より ある$(x_k)_k \subset A(y)$ が存在して, $x_k \downarrow x^*$ である.

$F(x)$は右連続なので $\lim_{k\to\infty} F(x_k) = F(x^*)$ である.

しかし $F(x_k) \geq y$ $({}^\forall k)$ より $F(x^*) \geq y$ でもある. つまり $x^* \in A(y)$.

(11) Yがr.v.であることは連続関数と可測関数の合成が可測であることによる.

$y \in (0,1)$で考える.

(10)より
$$
\begin{aligned}
P(Y \geq y) &= P(F(X(\omega)) \geq y) \\
&= P(X(\omega) \in A(y)) \quad \leftarrow A(y)\text{は閉} \\
&= P(X \geq F^{-1}(y)) \quad \leftarrow F^{-1}(y) = \inf\{x \mid x \in A(y)\} \\
&= 1 - F(F^{-1}(y)) + P(X = F^{-1}(y))
\end{aligned}
$$

ここで $F(F^{-1}(y)) = y$ である. なぜなら(10)より $F(F^{-1}(y)) \geq y$ であるが, $F(F^{-1}(y)) > y$ とすると, ${}^\forall\varepsilon > 0$に対し, $F(F^{-1}(y) - \varepsilon) < y$ になるが, 中間値の定理より, (Fが連続なので) $F^{-1}(y) - \varepsilon < {}^\exists\tilde{x} < F^{-1}(y)$ で $F(\tilde{x}) = y$ とできる. これは$F^{-1}(y)$の定義と矛盾する.

つまり, $F(F^{-1}(y)) = y$ である. さらに, Fは連続なので $P(X = F^{-1}(y)) = 0$.

よって $P(Y \geq y) = 1 - y$ で $P(Y < y) = y$ でもある.

一方. $P(Y = y) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{y \leq Y < y + \frac{1}{n}\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(Y \in [y, y + \frac{1}{n}))$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(y + \frac{1}{n} - y\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

よって $P(Y \leq y) = P(Y < y) + P(Y = y) = y$ である.

$y = 0, 1$においては $\lim_{y\to 0} P(Y \leq y) = 0$, $\lim_{y\to 1} P(Y \leq y) = 1$ より O.K. //

(12) (i) $\xi_F((a,b]) = \{x \in (0,1] \mid F^{-1}(x) \in (a,b]\}$
$= \{x \in (0,1] \mid a < F^{-1}(x) \leq b\}$
$= \{x \in (0,1] \mid F(a) < x \leq F(b)\} = (F(a), F(b)] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(ii) $\xi_F(\mathbb{R}) = (0,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(iii) $\xi_F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ なら $\xi_F(A^c) = (\xi_F(A))^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(iv) (2)の証明と同様

(v) (i)〜(iv)より $\mathcal{A}$はσ-加法族で任意の区間$(a,b]$を含む. よって
$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である.

(13) (12)より $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し、$\xi_F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ より $\mu(\xi_F(A))$ は well-defined.

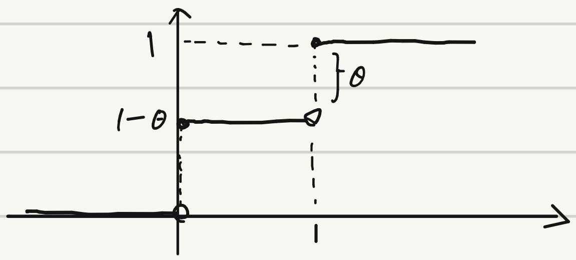
また、P_F が確率測度になることも確かめられる。実際、ξ_F の定義より

$P_F = F^{-1}\# \mu$ (μ の push-forward) である。

$$P_F((-\infty, x]) = \lambda(\xi_F(-\infty, x]) = \lambda(\{u \in (0,1] \mid F^{-1}(u) \leqq x\})$$
$$= \lambda(\{u \in (0,1] \mid u \leqq F(x)\})$$
$$= \lambda((0, F(x)]) = F(x)$$

//

(14)



$(\theta = F(X=1),\ 1-\theta = F(X=0)$ としている$)$

(15)

$$F(x-) = \lim_{y \nearrow x} F(y) = \lim_{y \nearrow x} P(X \leqq y) = \lim_{n \to \infty} P\left(X \leqq x - \frac{1}{n}\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{n \to \infty} \left\{X \leqq x - \frac{1}{n}\right\}\right)$$
$$= P(X < x)$$

(16) $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) - F(x-) \geqq \frac{1}{n}\}$ とする。

不連続点の集合は $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ であるが、

$$1 \geqq P(A_n) \geqq \sum_{x \in A_n} P(X = x) = \sum_{x \in A_n} (F(x) - F(x-)) \geqq |A_n| \cdot \frac{1}{n}$$

であるので $|A_n| \leqq n$ である。(A_n が非可算なら、高々可算個の部分集合を取ってくれば $|A_n| > n$ ではないことが分かる)

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は有限集合の可算和なので、高々可算である。

//