演習解答5

(1) 単調収束定理より. $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} E[|X_k|] = \lim_{n\to\infty} E[\sum_{k=1}^{n}|X_k|]$
$= E[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|X_k|] = E[\sum_{k=1}^{\infty}|X_k|]$

($\sum_{k=1}^{\infty}|X_k(\omega)| = \infty$ なるωが存在しても成り立つ.)

よって. $Z = \sum_{k=1}^{\infty}|X_k|$ とすると. $E[Z] < \infty$ で、 ← ($Z(\omega)=\infty$ なるωが存在しても積分は同様に定義する.)
$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ に対し. $|Y_n| \le Z$ である.

よって. 優収束定理より. $\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} E[X_k] = \lim_{n\to\infty} E[Y_n]$
$\underset{\text{優収束}}{=} E[\lim Y_n] = E[\sum_{n=1}^{\infty} X_n]$

(2) $0 \le \frac{n}{X}\mathbb{1}[X>n] \le \mathbb{1}[X>n]$ であることに注意する (∵ $\mathbb{1}[X>n] \ne 0$ のとき. $X>n$)
すると. Fatou の補題(の一般形)より ← 演習問題4を参照

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} E\left[\frac{n}{X}\mathbb{1}[X>n]\right] \le \limsup E[\mathbb{1}[X>n]]$$
$$\le E[\limsup \mathbb{1}[X>n]] \quad (\because \text{Fatou})$$
$$= E[\mathbb{1}[X=\infty]]$$
$$= P(X=\infty) = 0$$

よって. $\lim_{n\to\infty} E[\frac{n}{X}\mathbb{1}[X>n]] = 0$

//

(3) $$\frac{\partial}{\partial t}E[g(t,X)] = \lim_{h\to 0}\frac{E[g(t+h,X)] - E[g(t,X)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} E\left[\frac{g(t+h,X) - g(t,X)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} E\Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} g(t+\theta_{h,x}h, X)}_{\text{一様に }Z\text{ で上からおさえられる}}\Big] \quad (0 \le {}^{\exists}\theta_{h,x} \le 1) \text{ 平均値の定理}$$
$$= E\left[\lim_{h\to 0}\frac{\partial}{\partial t} g(t+\theta_{h,x}h, X)\right]$$
$$= E\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h,X) - g(t,X)}{h}\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial t} g(t,X)\right]$$

//

(4) $\phi(t) = \int_0^1 e^{itx}\,dx = \left[\frac{1}{it}e^{itx}\right]_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it} = \frac{e^{\frac{it}{2}}\left(e^{\frac{it}{2}}-e^{-\frac{it}{2}}\right)}{it}$

$$= \frac{e^{\frac{it}{2}}\left(e^{\frac{it}{2}}-e^{-\frac{it}{2}}\right)}{it} = e^{\frac{it}{2}}\cdot\frac{2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{it} = e^{\frac{it}{2}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\phi'(t) = \frac{i}{2}e^{\frac{it}{2}}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) + e^{\frac{it}{2}}\mathrm{sinc}'\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\phi''(t) = -\frac{1}{4}e^{it}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{i}{2}e^{\frac{it}{2}}\mathrm{sinc}'\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$+ \frac{i}{2}e^{\frac{it}{2}}\mathrm{sinc}'\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + e^{\frac{it}{2}}\mathrm{sinc}''\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}$$

今, $\mathrm{sin}'(0)=0$, $\mathrm{sinc}''(0) = -\frac{1}{3}$ であるので,

$$\phi'(0) = \frac{i}{2},\quad \phi''(0) = -\frac{1}{4}-\frac{1}{12} = -\frac{1}{3}$$

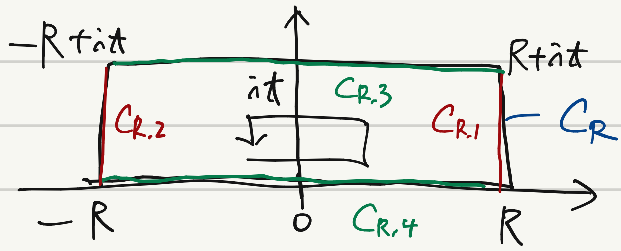
よって

$$E[X] = \frac{\phi'(0)}{i} = \frac{1}{2},\quad Var[X] = -\phi''(0) + (\phi'(0))^2 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad //$$

(5) 標準正規分布で導出すれば十分.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-it)^2\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dx$$

$$= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-it)^2\right)dx$$



左図のような積分経路を考えると, Cauchyの積分定理より $\int_{C_R}\cdots dx = 0$ である.

$$\begin{cases}\int_{C_{R,1}}\cdots dx \longrightarrow 0\\ \int_{C_{R,2}}\cdots dx \longrightarrow 0\end{cases}$$ であることはすぐわかるので.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-it)^2\right)dx}_{\lim_{R\to\infty}\int_{C_{R,4}}\cdots dx} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x+it-it)^2\right)dx}_{-\lim_{R\to\infty}\int_{C_{R,3}}\cdots dx}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$
$$= 1$$

よって標準正規分布の c.f. は $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ である。
特性関数の性質より $N(\mu, \sigma^2)$ の c.f. は $\phi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ //

$\left(\because \underset{Z\sim N(0,1)}{E}\left[e^{it(\sigma Z+\mu)}\right] = e^{it\mu} E\left[e^{i(t\sigma)Z}\right] = e^{it\mu} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \right)$

(6) $\frac{1}{1+t^2}$

($\because$ 指数分布の特性関数 $\frac{1}{1-it}$ を正側と負側でそれぞれ用いて、

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-it} + \frac{1}{1+it}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

を得る。)

(7) ・コーシー分布は $^\forall t>0$ で $E[e^{tX}] = \infty$ となる。
・指数分布は $E[e^{tx}] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{tx} dx = \int_0^\infty \lambda e^{(t-\lambda)x} dx$

より、$t \geqq \lambda$ の時、発散する。

(8) $|e^{itX}| \leqq 1$ より、優収束定理が使えて

$$\lim_{t_n\to t} E[e^{it_n X}] = E\left[\lim_{t_n\to t} e^{it_n X}\right] = E[e^{itX}]$$

(9)

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i - X_{n+1}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j E[X_i X_j] - 2\sum_{i=1}^n \alpha_i E[X_i X_{n+1}] + E[X_{n+1}^2]$$

ここで、$\Sigma = (E[X_i X_j])_{i,j}$, $b = (E[X_i X_{n+1}])_i$ とおくと、

$\min_{\alpha\in\mathbb{R}^n} \alpha^T \Sigma \alpha - 2\alpha^T b$ の解 $\hat{\alpha}$ を用いて、$\sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i X_i = \hat{X}_{n+1}$ とすれば良い。

$\ker(\Sigma)$ を Σ の kernel とする。($\ker(\Sigma) = \{u\in\mathbb{R}^n \mid u^T\Sigma u = 0\}$)
$^\forall u \in \ker(\Sigma)$ に対し、$u^T \Sigma u = 0$ であることから、$E\left[\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i\right)^2\right] = 0$ である。
つまり、$\sum_{i=1}^n u_i X_i = 0$ (a.s.) である。
このことから、$u \in \ker(\Sigma)$ に対し、$u^T b = E\left[\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i\right) X_{n+1}\right] = 0$ であることもわかる。つまり、$b \in \ker(\Sigma)^\perp$ である。

よって、Σ の一般化逆行列 Σ^+ を用いて、$b = \overbrace{\Sigma\Sigma^+}^{\mathrm{Proj}(\mathrm{Ker}(\Sigma)^\perp)} b$ が成立ち、

$$\alpha\Sigma\alpha - 2\alpha^T b = (\alpha - \Sigma^+ b)^T \Sigma (\alpha - \Sigma^+ b) - b^T \Sigma^+ \Sigma \Sigma^+ b$$

を得る。よって $\hat{\alpha}$ の解は $\hat{\alpha} = \Sigma^+ b + u$ $(u \in \mathrm{Ker}(\Sigma))$ で与えられる。