演習問題

(1) $\mathcal{A} = \{(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n] \mid a_k \in \mathbb{R}\}$

として、$\sigma(\mathcal{A})$ は $\{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid -\infty \leq a_n \leq b_n \leq \infty\}$

を含むことを示せ。

(2) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を示せ。

(3) $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$: Ω における非空な集合族

$\begin{cases} (1) & \mathcal{A}_k \text{ は } \pi\text{-システム} \\ (2) & \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \text{ は独立.} \end{cases}$

$\Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{A}_n)$ も独立.

を示せ。

(4) $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ が可測で、$X_1, \ldots, X_n$ が r.v. のとき、

$f(X_1, \ldots, X_n)$ が r.v. になることを示せ。

(5) $X_1, \ldots, X_n$ が r.v. のとき、$X_1 + \cdots + X_n$ も r.v. であることを示せ。

(6) ある分布関数 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が、

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2 \qquad ((x_1, x_2) \in [0,1]^2)$$

をみたす時、対応する確率測度 P について、

$$P\left(\{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqq 1\}\right)$$

を求めよ。

(7) $(\Omega, \mathcal{F})$: 可測空間, $X_1, X_2, \ldots$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の有界な r.v. である。

(a) $\sup_n X_n$, $\inf_n X_n$ はともに r.v. であることを示せ。

(b) $\liminf_{n\to\infty} X_n$, $\limsup_{n\to\infty} X_n$ が r.v. であることを示せ。

(c) $\forall \omega \in \Omega$ について $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ が存在するとする。

このとき、$\lim_{n\to\infty} X_n$ は r.v. であることを示せ。

(9) $X:\Omega \to \mathbb{R}^n$ を確率ベクトルとする.
$^\forall\varepsilon>0$ に対し, $^\exists k\in\mathbb{R}$ で, $P(\max_k |X_k| \geqq k) \leqq \varepsilon$ であることを示せ.
$(0 \leq k < \infty)$

(10) 連続な分布関数 F は 一様に 連続であることを示せ.

(11) 共通の連続な分布関数 F を持つ2つの独立な r.v. X_1, X_2 を考える. $P(X_1 = X_2) = 0$ を示せ. (少し難)

(12) X_1, X_2 は独立な r.v. で, 同じ分布関数を持つとする.
このとき, $X = (X_1, X_2)$ と $\tilde{X} = (X_2, X_1)$ は同じ同時分布関数を持つことを示せ。

(13) $\Omega = \{1, \ldots, \ell\}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in \{1, \ldots, \ell\}, k = 1, \ldots, n\}$
Ω 上に一様分布 P を考える. このとき, $X_k((x_1, \ldots, x_n)) = x_k$ とすると, $X_1, \ldots, X_n$ は独立であることを示せ.

(14) 東京都の住人から1人ランダムにピックアップして, 新型コロナウィルスに関するPCR検査を受けてもらった。結果は陰性であった。その人が実は感染している確率を見積もれ。 (正確な値は出せないので各種統計量から"見積もる"だけで良い.)