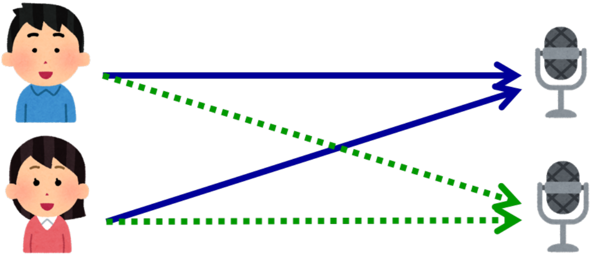
確率数理工学補助スライド
キュムラントの応用「独立成分分析」

鈴木　大慈
計数工学科
taiji@mist.i.u-tokyo.ac.jp

カクテルパーティー問題

複数人が同時に話している音声データを，それぞれの話者の声に分解したい．



ICA (独立成分分析)

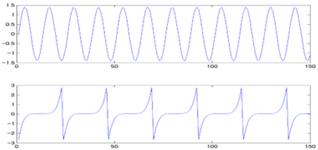
- $S = (S_1, S_2, \ldots, S_p)$: それぞれ独立
- 観測値: $X = AS$
- X を元の独立な信号 $S_1, \ldots, S_p$ に分解したい.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{p1} \end{pmatrix} S_1 + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{p2} \end{pmatrix} S_2 + \cdots + \begin{pmatrix} A_{1p} \\ A_{2p} \\ \vdots \\ A_{pp} \end{pmatrix} S_p$$

ICA (独立成分分析)

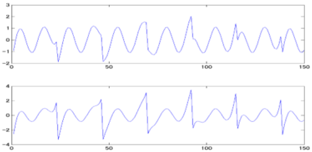
- $S = (S_1, S_2, \ldots, S_p)$: それぞれ独立
- 観測値: $X = AS$
- X を元の独立な信号 $S_1, \ldots, S_p$ に分解したい.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{p1} \end{pmatrix} S_1 + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{p2} \end{pmatrix} S_2 + \cdots + \begin{pmatrix} A_{1p} \\ A_{2p} \\ \vdots \\ A_{pp} \end{pmatrix} S_p$$



独立成分

$\Rightarrow$



混合された信号

ICA (独立成分分析)

- $S = (S_1, S_2, \ldots, S_p)$: それぞれ独立
- 観測値: $X = AS$
- X を元の独立な信号 $S_1, \ldots, S_p$ に分解したい.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{p1} \end{pmatrix} S_1 + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{p2} \end{pmatrix} S_2 + \cdots + \begin{pmatrix} A_{1p} \\ A_{2p} \\ \vdots \\ A_{pp} \end{pmatrix} S_p$$

1. X, S の平均は 0 であるとする（中心化）.
2. A は直交行列であるとする（白色化）.
   $\rightarrow$ $WA = I$ を満たす $W = A^{-1}$ を見つけられれば,

$$WX = S$$

   で S を復元できる.

Fast ICA

キュムラントを用いた方法

平均 0 の確率変数 Z の 4 次キュムラント

$$\kappa_4(Z) = \mathrm{E}[Z^4] - 3(\mathrm{E}[Z^2])^2$$

$$Z = \sin(\theta)S_1 + \cos(\theta)S_2$$

と混合されている時，キュムラントの性質より

$$\kappa_4(Z) = \sin(\theta)^4\kappa_4(S_1) + \cos(\theta)^4\kappa_4(S_2)$$

が成り立つ．

Fast ICA

キュムラントを用いた方法

平均 0 の確率変数 Z の 4 次キュムラント

$$\kappa_4(Z) = \mathrm{E}[Z^4] - 3(\mathrm{E}[Z^2])^2$$

$$Z = \sin(\theta)S_1 + \cos(\theta)S_2$$

と混合されている時，キュムラントの性質より

$$\kappa_4(Z) = \sin(\theta)^4\kappa_4(S_1) + \cos(\theta)^4\kappa_4(S_2)$$

が成り立つ．

$\kappa_4(S_1) > \kappa_4(S_2)$ としよう．すると，

$$\sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4 \leq 1$$

より $\sin(\theta) = 1$ で $\kappa_4(Z)$ は最大化される．
つまり，キュムラントを最大化する方向が見つけられれば独立成分が見つかる．

w: $\|w\| = 1$ なら，A が直交行列なので $\|w^\top A\| = 1$ である．よって，ある θ が存在して，

$$Z_w = w^\top X = w^\top AS = \sin(\theta)S_1 + \cos(\theta)S_2.$$

なので，Z_w の 4 次キュムラントを最大化すれば S_1 が見つかる．

FastICA の手順

$k = 1, \ldots, p$ で以下を繰り返す:

1. $Z_w = w^\top X$ に対して，

$$\hat{w}_k = \underset{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|=1}{\operatorname{argmax}} \kappa_4(Z_w).$$

2. $\hat{S}_k = \hat{w}_k^\top X$
3. $X \leftarrow X - \hat{w}_k \hat{S}_k$ として 1 に戻る．

キュムラントはデータから推定する:

$$\hat{\kappa}_4(Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^4 - 3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)^2.$$